

Высокоточные вычисления для моделирования нелинейных динамических систем с аттракторами

Пчелинцев Александр Николаевич

Тамбовский государственный технический университет

Тамбов, 2022

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = B_0 + B_1 X + \varphi(X), \quad (1)$$

где $X(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ – векторная функция времени t со значениями в пространстве \mathbb{R}^n , $B_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор-столбец,

$$\varphi(X) = [\varphi_1(X) \dots \varphi_n(X)]^T,$$

$\varphi_p(X) = \langle Q_p X, X \rangle$, B_1 и Q_p ($p = \overline{1, n}$) – матрицы $(n \times n)$ действительных чисел.

Анализ современной литературы показал, что формулы общего решения систем вида (1) в классе каких-либо известных функций пока не найдено.

Система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3. \end{cases}$$

Для данной системы матрицы имеют вид:

$$B_0 = \mathbf{0}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Примеры систем с квадратичными нелинейностями

Система Чена

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \end{cases}$$

Для данной системы матрицы имеют вид:

$$B_0 = \mathbf{0}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 1 Девять систем Джулиана Спротта – статья
Sprott J.C. Some simple chaotic flows // Physical Review E. 1994. Vol. 50. Iss. 2. R647.
- 2 Примеры систем со скрытыми аттракторами – статья
Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. Iss. 3. PP. 1-50.
- 3 Каноническая модель Гаузе–Лотки–Вольтерры для описания динамики последовательной памяти человека – статьи
Afraimovich V., Gong X., Rabinovich M. Sequential memory: binding dynamics // Chaos. 2015. Vol. 25. 103118;
Rabinovich M.I., Afraimovich V.S., Varona P. Heteroclinic binding // Dynamical Systems. 2010. Vol. 25. Iss. 3. PP. 433-442.
- 4 Модель саморазвивающейся рыночной экономики – книга
Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.
- 5 Система Лоренца-Стенфло для описания динамики акустико-гравитационных волн в атмосфере Земли – статья
Stenflo L. Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere // Physica Scripta. 1996. Vol. 53. Iss. 1. PP. 83-84.

Пусть

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i t^i,$$

где $\Lambda_0 = X(0)$ – вектор значений начальных условий для системы (1), $\Lambda_i \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi_p(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{i,p} t^i, \quad \Phi_{i,p} = \sum_{j=0}^i \langle Q_p \Lambda_j, \Lambda_{i-j} \rangle, \quad p = \overline{1, n}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Phi_i &= [\Phi_{i,1} \ \dots \ \Phi_{i,n}]^T. \\ \Lambda_1 &= B_0 + B_1 \Lambda_0 + \Phi_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Рекуррентное соотношение при $i \geq 2$

$$\Lambda_i = \frac{B_1 \Lambda_{i-1} + \Phi_{i-1}}{i}. \tag{3}$$

Оценка области сходимости рядов

$$h_1(\Lambda_0) = \|\Lambda_0\|, \quad \mu = n \max_{p=1, n} \|Q_p\|,$$

$$h_2(\Lambda_0) = \begin{cases} \|B_0\| + (\|B_1\| + 2\mu)h_1 + \mu h_1^2, & \text{если } h_1 > 1, \\ \|B_0\| + \|B_1\| + \mu & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ряды сходятся при $t \in (-\tau; \tau)$, где $\tau = 1/h_2$.

Выберем

$$0 < \Delta t < \tau$$

или

$$-\tau < \Delta t < 0.$$

Критерий окончания суммирования

$$\|\Lambda_i\| |\Delta t|^i < \varepsilon_p.$$

Lozi R., Pogonin V.A., Pchelintsev A.N. A new accurate numerical method of approximation of chaotic solutions of dynamical model equations with quadratic nonlinearities // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. Vol. 91. PP. 108-114.

Алгоритм численного решения

- 1 Задать значения машинного эпсилон ε_m и way (1 или -1).
- 2 Задать значения T , ε_p и $\Lambda_0 = X(0)$.
- 3 $t := 0$.
- 4 Вычислить значение Δt как функцию от Λ_0 .
- 5 $t := t + \Delta t$.
- 6 Если $t > T$, то $flag := 1$; $\Delta t := \Delta t - (t - T)$
Иначе если $t < T$, то $flag := 0$
Иначе $flag := 1$.
- 7 $p := 1$; $i := 0$; $x := \Lambda_0$.
- 8 $i := i + 1$; $p := p \cdot way \cdot \Delta t$. Вычислить Λ_i по формуле (2) или (3).
- 9 $x := x + \Lambda_i \cdot p$.
- 10 $L := \|\Lambda_i\| \cdot |p|$.
- 11 Если $L > \varepsilon_p$, то перейти к шагу 8.
- 12 $\Lambda_0 := x$.
- 13 Вывод Λ_0 .
- 14 Если $flag = 0$, то перейти к шагу 4.

Положим, что

$$\begin{aligned}\Omega &= [t_0; t_1] \cup [t_1; t_2] \cup \dots \cup [t_{N-1}; t_N], \\ t_0 &= 0, \quad t_N = T, \\ \Delta t_l &= t_l - t_{l-1},\end{aligned}$$

n_l – степень полинома, соответствующего моменту времени t_l ,
 $l = \overline{1, N}$,

$$\begin{aligned}n_{\min} &= \min_l n_l, \quad n_{\max} = \max_l n_l, \quad l_{\min} = \operatorname{indmin}_l n_l, \\ l_{\max} &= \operatorname{indmax}_l n_l, \quad \Delta t_{\min} = \min_l \Delta t_l, \\ \Delta t_{\max} &= \max_l \Delta t_l, \quad d_{\min} = \operatorname{indmin}_l \Delta t_l, \\ d_{\max} &= \operatorname{indmax}_l \Delta t_l.\end{aligned}$$

$$a = 35, b = 3 \text{ и } c = 28.$$

№	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
1	0	-10.3391	-11.1003	23.8488
2	3.695	-10.4283	-10.7454	23.3929
3	8.411	-10.5177	-10.7434	23.5557

№	t	$\dot{x}_1(t)$	$\dot{x}_2(t)$	$\dot{x}_3(t)$
1	0	-26.6412	8.14097	43.2213
2	3.695	-11.0986	16.0749	41.8775
3	8.411	-7.89935	20.561	42.3287

Исходные тексты программы доступны по адресу
https://github.com/alpchelintsev/chen_sources

Прямой проход по времени

T	3.695	8.411
N	7549	16869
n_{\min}	18	19
l_{\min}	N	N
n_{\max}	27	27
l_{\max}	2304	2304
$t_{l_{\min}}$	3.69487	8.41082
$t_{l_{\max}}$	1.26107	1.26107
Δt_{\min}	0.000129384	0.000179493
d_{\min}	l_{\min}	l_{\min}
$t_{d_{\min}}$	$t_{l_{\min}}$	$t_{l_{\min}}$
Δt_{\max}	0.00124324	0.00124324
d_{\max}	2299	2299
$t_{d_{\max}}$	1.25485	1.25485

Обратный проход по времени

$-T$	-3.695	-8.411
\hat{N}	7549	16869
\hat{n}_{\min}	18	19
\hat{l}_{\min}	\hat{N}	\hat{N}
\hat{n}_{\max}	27	27
\hat{l}_{\max}	5206	14526
$t_{\hat{l}_{\min}}$	-3.69489	-8.41083
$t_{\hat{l}_{\max}}$	-2.38689	-7.10279
Δt_{\min}	-0.000109911	-0.000165672
\hat{d}_{\min}	\hat{l}_{\min}	\hat{l}_{\min}
$t_{\hat{d}_{\min}}$	$t_{\hat{l}_{\min}}$	$t_{\hat{l}_{\min}}$
Δt_{\max}	-0.00124325	-0.00124325
\hat{d}_{\max}	5252	14572
$t_{\hat{d}_{\max}}$	-2.44001	-7.15587

$$x_{1,0} = -10.33913519761, \quad x_{2,0} = -11.10031188035, \\ x_{3,0} = 23.84877914089.$$

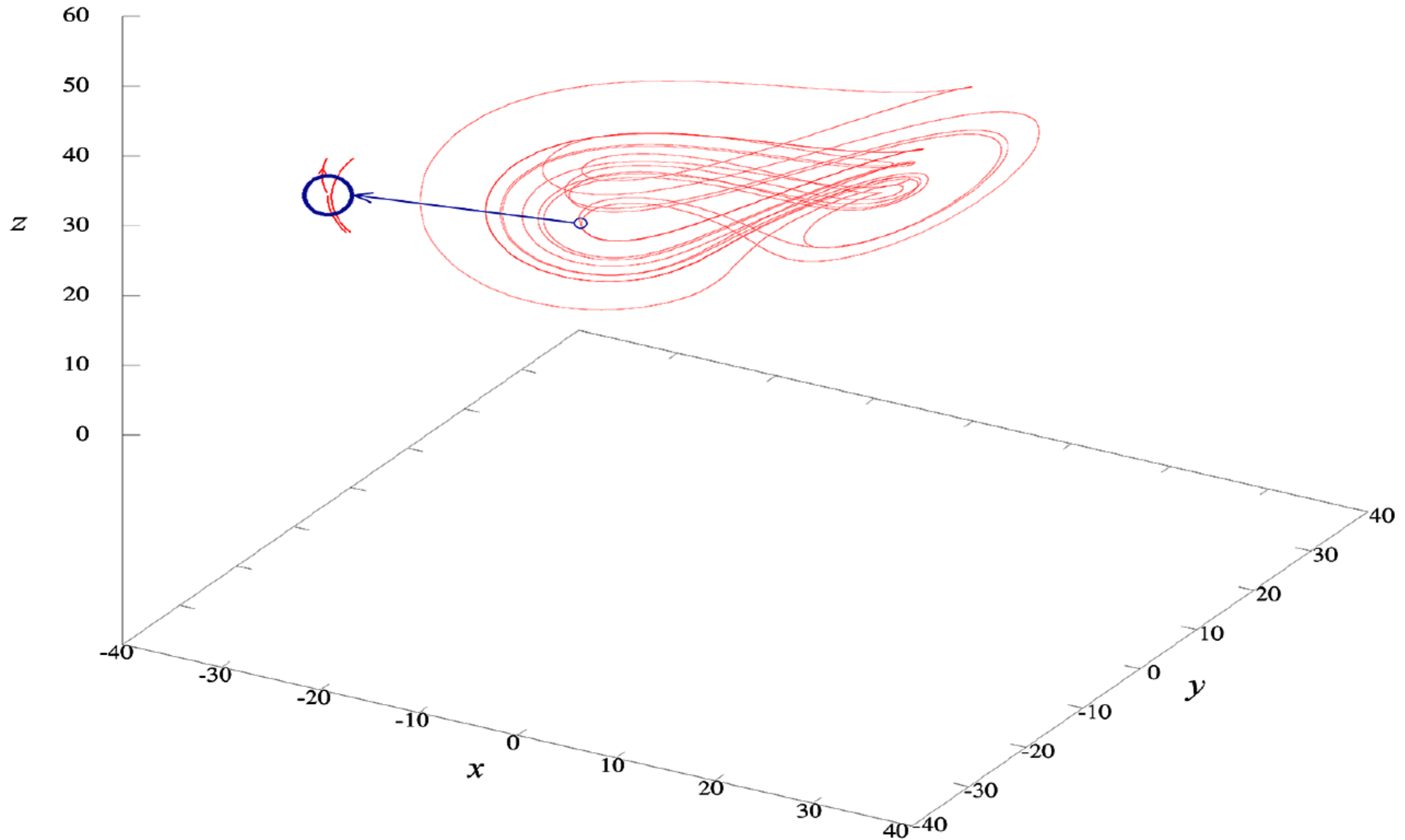
$$\varepsilon_p = 10^{-53}, \quad \varepsilon_m = 2.54895 \cdot 10^{-57} \quad (b_m = 189).$$

Такая точность обеспечивает совпадение всех знаков после запятой начальных условий при обратном проходе по времени.

$$N = \hat{N}, \quad t_{l_{\max}} + \left| t_{\hat{l}_{\max}} \right| \approx T, \quad d_{\max} + \hat{d}_{\max} \approx N, \quad t_{d_{\max}} + \left| t_{\hat{d}_{\max}} \right| \approx T.$$

Lozi R., Pchelintsev A.N. A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2015. Vol. 25. Iss. 13. 1550187. 10 pp.

На рисунке $x = x_1$, $y = x_2$ и $z = x_3$.



Частный случай разложения в степенной ряд для системы Лоренца

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3.$$

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i, \quad x_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^i, \quad x_3(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i.$$

Рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов:

$$\alpha_{i+1} = \frac{\sigma(\beta_i - \alpha_i)}{i+1}, \quad \beta_{i+1} = \frac{r\alpha_i - \beta_i - \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j}}{i+1}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j} - b\gamma_i}{i+1},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$. Оценка области сходимости рядов:

$$h_1 = \max\{2\sigma, r + 2h_2 + 1, b + 2h_2 + 1\}, \quad h_2 = \max\{|\alpha_0|, |\beta_0|, |\gamma_0|\}.$$

Если $h_2 \geq 1$, то $h_3 = h_1 h_2$. Иначе $h_3 = \max\{2\sigma, r + 2, b + 1\}$.

Ряды сходятся при $t \in (-\tau; \tau)$, где $\tau = 1/h_3$.

Пчелинцев А.Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. Вып. 2. С. 191-201.

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0. \quad (4)$$

Имеет решение

$$x(t) = \operatorname{tg}(t),$$

уравнением одной из асимптот которого является $t = \frac{\pi}{2}$. Как известно¹, эта функция может быть разложена в степенной ряд, сходящийся на полуинтервале $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

С другой стороны, для поиска решения задачи (4) можно использовать описанный выше метод. Получаемая область сходимости будет содержаться внутри полуинтервала $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Формулы для расчёта коэффициентов ряда

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i$$

имеют вид:

$$p_1 = 1 + p_0^2, \quad p_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^i p_j p_{i-j}}{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

¹Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. – М.: Наука, 1966. – С. 497.

Изначально в формуле (5) предполагается, что $p_0 = 0$, исходя из начального условия задачи (4). Описанным методом мы построим часть траектории. Части траектории сшиваются. При приближении к вертикальной асимптоте значение фазовой координаты x увеличивается, а оцениваемая величина длины интервала сходимости

$$\tau = \frac{1}{h_2(p_0)} = O\left(\frac{1}{p_0^2}\right),$$

уменьшается при $p_0 \rightarrow \infty$, где

$$h_2(p_0) = \begin{cases} 1 + 2|p_0| + p_0^2, & \text{если } |p_0| > 1, \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, численная схема никогда не перепрыгнет асимптоту $t = \frac{\pi}{2}$ и будет приближаться к ней сколь угодно близко.

В известной литературе² рассматривается только модификация метода Эйлера для таких систем.

²Жуковский Е.С. О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении // Известия высших учебных заведений. Математика. 1996. Вып. 4. С. 31-34.

Моделирование роста раковых опухолей

В 2016-ом году³ была предложена система с квадратичными нелинейностями для моделирования роста раковых опухолей

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2Nx_1 - x_1^2 - Hx_1x_3, \\ \dot{x}_2 = (4 - I)x_2 + 0.5x_1^2 - 0.14x_2^2 - 0.5Hx_2x_3 + 0.001x_3^2, \\ \dot{x}_3 = -Ix_3 + 0.07x_2^2 + 0.5Hx_2x_3 - 0.002x_3^2, \end{cases} \quad (6)$$

где параметры N – популяция нормальных клеток, H – популяция клеток-хозяинов паразита, I – популяция иммунных клеток (Т-лимфоциты и естественные киллеры); $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ – популяции во времени t пролиферирующих раковых клеток в аваскулярной, сосудистой и метастазирующей фазах соответственно.

Далее при исследовании системы на отрезке времени $[0; 27.327]$ было подобрано $b_m = 160$, $\varepsilon_m = 1.36846 \cdot 10^{-48}$ и $\varepsilon_p = 10^{-40}$.

³Llanos-Pérez J.A., Betancourt-Mar J.A., Cochob G., Mansilla R., Nieto-Villar J.M. Phase transitions in tumor growth: III vascular and metastasis behavior // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2016. Vol. 462. PP. 560-568.

Приведение системы к общему виду

Приведём систему (6) к общему виду (1) динамической системы:

$$\dot{X} = AX + \Phi(X),$$

где

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T, \quad \Phi(X) = [\varphi_1(X) \ \varphi_2(X) \ \varphi_3(X)]^T,$$

$$\varphi_p(X) = \langle Q_p X, X \rangle, \quad p = \overline{1, 3}, \quad A = \begin{bmatrix} 2N & 0 & 0 \\ 0 & 4 - I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -H \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.14 & -0.5H \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0.5H \\ 0 & 0 & -0.002 \end{bmatrix}.$$

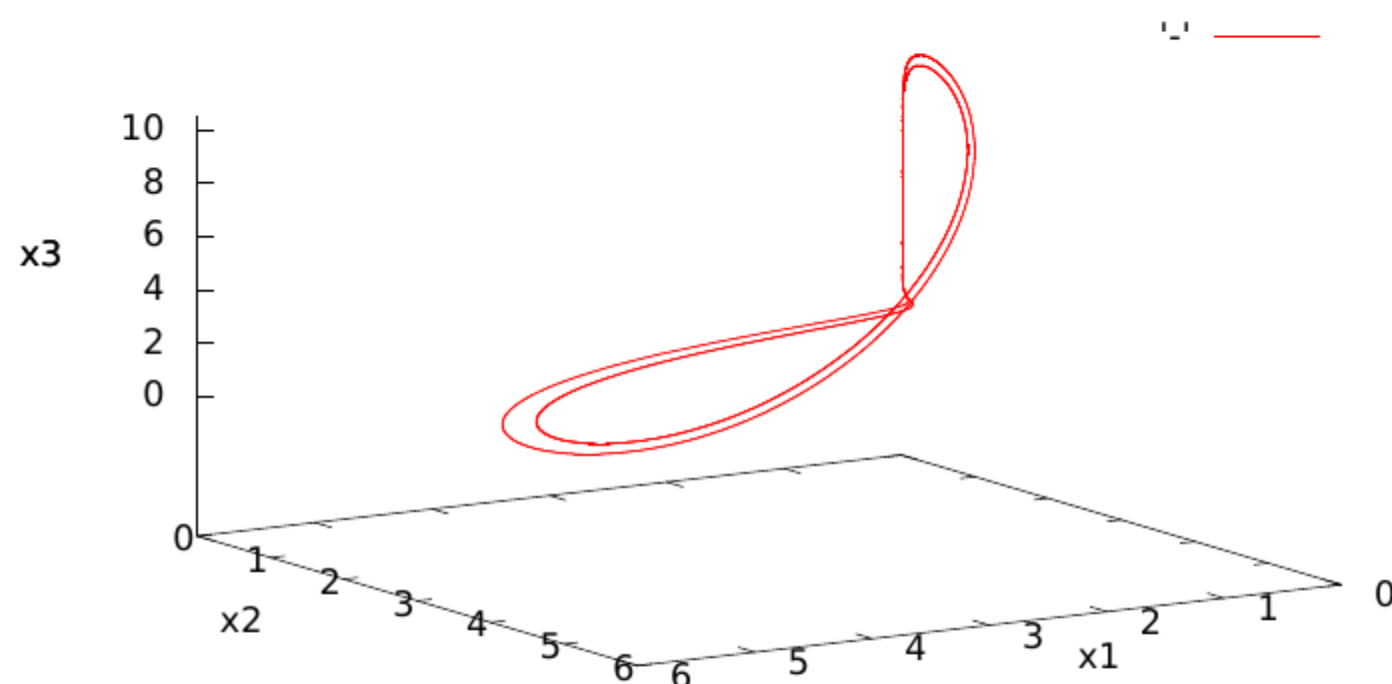
Результаты вычислительного эксперимента

$$\rho(t) = \sqrt{(x_1(t) - x_1(t_0))^2 + (x_2(t) - x_2(t_0))^2 + (x_3(t) - x_3(t_0))^2}.$$

Найдено предельное решение, близкое к периодическому, при $N = 5$, $H = 3$ и $I = 0.7$.

$$\begin{aligned}x_1(0) &= 0.1450756817, \\x_2(0) &= 0.8395885828, \\x_3(0) &= 9.954786333.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(t_0) &\approx \rho(t_2) \approx \rho(t_4), \\ \rho(t_1) &\approx \rho(t_3) \approx \rho(t_5), \\ t_2 - t_0 &\approx t_4 - t_2 \approx t_3 - t_1 \approx \\ &\approx t_5 - t_3 \approx 10.89 - \text{период},\end{aligned}$$



n	t_n	$x_1(t_n)$	$x_2(t_n)$	$x_3(t_n)$	$\rho(t_n)$
0	0	0.1450756817	0.8395885828	9.954786333	0
1	5.553	0.1201387594	0.7151506515	9.6198216985	0.358201
2	10.889	0.1434845476	0.8337896719	9.953662472	0.006117
3	16.439	0.1207485467	0.7178109534	9.6243463945	0.353004
4	21.778	0.1437352539	0.8342333601	9.9494643143	0.007668
5	27.327	0.118689978	0.7111230373	9.6323947777	0.348049

$$\varepsilon^{\{rk4\}} = \sqrt{\left(x_1^{\{rk4\}} - x_1(T)\right)^2 + \left(x_2^{\{rk4\}} - x_2(T)\right)^2 + \left(x_3^{\{rk4\}} - x_3(T)\right)^2},$$

где T – длина отрезка времени, где производится численное интегрирование. В нашем случае $T = 27.327$.

$\Delta t^{\{rk4\}}$	$\varepsilon^{\{rk4\}}$
0.05	0.0387658
0.01	$4.06488 \cdot 10^{-5}$
0.005	$2.40695 \cdot 10^{-6}$
0.001	$3.68753 \cdot 10^{-9}$

$\Delta t^{\{rk4\}}$ – шаг метода Рунге-Кутты.

Pchelintsev A.N. An accurate numerical method and algorithm for constructing solutions of chaotic systems // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 9. Iss. 2. PP. 207-221.

Сравнение с другими динамическими системами

Сравнение длин T отрезков интегрирования и точности ε_p для разных динамических систем.

<i>Динамическая система</i>	T	ε_p
Система Лоренца	6.827	10^{-50}
Система Чена	8.411	10^{-53}
Система Спротта–Джафари ⁴	34	10^{-15}
Система (6)	27.327	10^{-40}

⁴Jafari S., Sprott J.C., Nazarimehr F. Recent new examples of hidden attractors // The European Physical Journal Special Topics. 2015. Vol. 224. Iss. 8. PP. 1469-1476.

Случай кубической нелинейности: уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega(t + t_0)),$$

$$x(0) = p_0, \quad \dot{x}(0) = p_1.$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i, \quad (8)$$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{\omega u_0}{1}, \quad u_2 = \frac{\omega u_1}{2}, \dots, \quad u_i = \frac{\omega u_{i-1}}{i}, \dots$$

$$p_{i+2} = -\frac{\delta p_{i+1}}{i+2} - \frac{\beta \sum_{j=0}^i p_{i-j} \sum_{k=0}^j p_k p_{j-k}}{(i+1)(i+2)} + \frac{\gamma u_i \cos\left(\omega t_0 + \frac{\pi i}{2}\right)}{(i+1)(i+2)},$$
$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Pchelintsev A.N., Ahmad S. Solution of the Duffing equation by the power series method // Transactions of the TSTU. 2020. Vol. 26. Iss. 1. PP. 118-123.

Случай кубической нелинейности: уравнение Дуффинга

Поскольку

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega^i}{i!} = 0,$$

то существует такое значение $i = i^*$, что для любых $i > i^*$ имеет место неравенство

$$\frac{\omega^i}{i!} < 1.$$

Введём обозначения

$$N_\omega = \max_{i=0, i^*} \frac{\omega^i}{i!}, \quad \frac{\omega^0}{0!} = 1,$$

$$h_1 = \max\{|p_0|, |p_1|, 1\}, \quad h_2 = \delta + \beta (3h_1^2 + 3h_1 + 1) + \gamma N_\omega + 1,$$

$$h = h_1 h_2.$$

Доказана теорема: ряд (8) сходится при $t \in \left(-\frac{1}{h}; \frac{1}{h}\right)$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!